

Conduction de la chaleur aux temps courts: les limites spatio-temporelles des modèles parabolique et hyperbolique

Philippe Guillemet*, Jean-Pierre Bardon

Laboratoire de Thermocinétique, UMR-CNRS 6607 École Polytechnique de l'Université de Nantes, Rue Christian Pauc, BP 50609,
44306 Nantes cedex 3, France

(Reçu le 7 juin 2000, accepté le 11 septembre 2000)

Résumé — La loi parabolique de conduction de la chaleur est réputée ne pas pouvoir rendre compte des transferts thermiques instationnaires dans les tout premiers instants du régime transitoire, en raison du caractère « instantané » de la relation qui lie le flux de chaleur au gradient de température dans la loi de Fourier. L'introduction d'un temps de relaxation dans cette relation, qui conduit à l'équation hyperbolique de la chaleur, n'est pas totalement satisfaisante. Hormis les problèmes physiques que cela soulève, une réflexion sur la dimension des espaces concernés par les régimes transitoires ultra rapides montre qu'un problème fondamental se doit d'être envisagé : l'interaction microscopique des porteurs d'énergie du milieu avec la frontière, siège de l'événement thermique. Une modélisation macroscopique du transport de la chaleur à l'échelle du temps de relaxation de ces porteurs et de leur libre parcours moyen est proposée, par le biais de la modification des conditions aux limites. Les apports significatifs de ce modèle sont dégagés à partir d'un exemple d'application : le mur semi-infini soumis à un échelon de température sur sa face. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

conduction de la chaleur / Fourier / parabolique / hyperbolique / temps de relaxation / réseau transitoire / conditions aux limites / régime instationnaire

Abstract — Heat conduction at very short times: spatio-temporal limits of parabolic and hyperbolic models. The parabolic law of heat conduction is reputed not to be able to give account of the unsteady thermal transfer in the first instants of the transient regime, because the relation that links the heat flux to the temperature gradient (Fourier law) is instantaneous. The introduction of a relaxation time in this relation, which drives to the hyperbolic heat equation, is not satisfactory. Except the physical problems that it raises, a reflection on the dimension of the spaces concerned by the unsteady regimes shows that a fundamental problem must be considered: the microscopic interaction of the energy carriers of the medium with the frontier where the thermal event occurs. A macroscopic modeling of heat transport at the relaxation scale of these carriers and their mean free path is proposed, using a modification of the boundary conditions. The meaningful contribution of this model is illustrated by an analytical application: the semi-infinite wall submitted to a sudden step of temperature at its frontier. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

conduction of heat / Fourier / parabolic / hyperbolic / relaxation time / temporary gratings / boundary conditions / unsteady conduction

Nomenclature

$A(\omega)$	amplitude spectrale	K·s	H	fonction de Heaviside
c_v	capacité thermique massique	J·K ⁻¹ ·kg ⁻¹	I_0 et I_1	fonctions de Bessel modifiées (ordre 0 et 1)
c_x, c_y, c_z	vitesse du son dans les directions de l'espace	m·s ⁻¹	k	numéro du mode de vibration m ⁻¹
C_{chal}	célérité de l'onde de chaleur	m·s ⁻¹	l	période spatiale m
erfc	fonction erreur complémentaire		l_{pm}	libre parcours moyen des phonons m
			L	dimension du milieu m
			q	densité de flux de chaleur W·m ⁻²
			r	rayon vecteur m
			R	résistance thermique unitaire K·m ⁻² ·W ⁻¹
			t	temps s
			t'	variable temporelle d'intégration s

*Correspondance et tirés à part.
philippe.guillemet@isitem.univ-nantes.fr

T	température	K
T_1	saut ou écart de température	K
T_p	température de paroi	K
V_{son}	célérité du son	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Symboles grecs

α	diffusivité thermique	$\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
λ	conductivité thermique	$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
μ	facteur de réduction	
ω	pulsation	$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
ω_k	pulsation du mode k	$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
τ	temps de relaxation	s

0. INTRODUCTION

L'impact d'une impulsion laser (nano, pico, femto, voire attoseconde) lors de la fabrication d'un alliage ou d'un traitement chirurgical, la formation d'un spot de haute température dans un propulseur solide en explosion rapide, la friction ultra rapide des films minces, l'avancée d'une fracture dans un matériau, l'effondrement des supernovae, le refroidissement d'un circuit électronique très haute fréquence... sont des situations en marge de la thermique traditionnelle car elles relèvent de conditions d'extrême intensité et d'échelles de temps ultracourtes.

La loi parabolique de la chaleur est réputée ne pas pouvoir rendre compte des tout premiers instants du régime transitoire, en raison du caractère « instantané » de la relation qui lie le flux de chaleur au gradient de température dans la loi de Fourier. La maîtrise technologique des transferts thermiques dans ces conditions est pourtant aujourd'hui un enjeu considérable notamment dans le domaine de la conception et de l'optimisation des micro et nano systèmes (Taine et Saulnier [1]). A mesure que les procédés d'élaboration de ces systèmes évoluent, la maîtrise théorique des transferts de chaleur aux échelles qui les caractérisent s'avère insuffisante, butant sur des notions macroscopiques inadaptées.

L'introduction d'un temps de relaxation dans la relation de Fourier, qui conduit à la très célèbre équation hyperbolique de la chaleur, constitue-t-elle une solution acceptable au problème de la conduction de la chaleur aux temps courts ?

1. UNE VISION INHABITUELLE DU TRANSFERT DE CHALEUR**1.1. Le paradoxe de la perception instantanée d'une perturbation thermique localisée**

Ce paradoxe physique, difficilement acceptable, auquel conduit l'équation parabolique de la chaleur est une traduction du caractère instantané de la loi de Fourier :

$$\mathbf{q}(t) = -\lambda(T) \nabla T(t) \quad (1)$$

qui sous-entend une simultanéité parfaite entre le flux de chaleur et le gradient de température qui le provoque.

Cette loi n'est pas une exception dans le domaine des relations constitutives. Bien d'autres relations du même type, décrivant des processus de transport tels que les lois de Stokes, de Newton, d'Ohm, de Fick posent le même problème.

1.2. La limite supposée de la loi de Fourier

La loi de Fourier permet pourtant depuis près de deux siècles de prévoir avec succès les champs de température de l'immense majorité des situations expérimentales, y compris jusqu'à des échelles situées à la limite de celles actuellement accessibles à la mesure.

Quand donc le paradoxe mathématique illustré ci-dessus fait-il irruption dans la réalité de l'expérimentation ? Au début du régime transitoire, évidemment, mais pendant combien de temps ?

Si la chaleur diffuse classiquement dans le milieu de diffusivité α , la distance de pénétration à un instant donné est $\sqrt{\alpha t}$. Si l'on cherche à imposer une vitesse finie au transport de la chaleur, on peut estimer dans le cas d'un diélectrique solide pour lequel ce sont les phonons qui portent l'énergie, que cette vitesse est de l'ordre de celle du son (V_{son} , en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). La distance de propagation à un instant donné est alors $V_{\text{son}}t$. On peut ainsi estimer un temps caractéristique pour lequel les distances de pénétration ci-dessus sont comparables :

$$t_{\text{caractéristique}} = \frac{\alpha}{V_{\text{son}}^2} \quad (2)$$

Fixons-nous un milieu de diffusivité moyenne ($10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$) dans lequel le son se propage à la vitesse d'environ $1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le temps caractéristique que l'on ob-

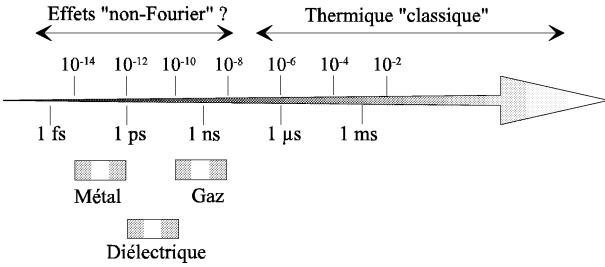


Figure 1. Echelle des temps et valeurs classiquement admises des temps de relaxation de propagation de la chaleur.

Figure 1. Time scale and classically admitted values of heat propagation relaxation time.

tient dans ce cas est de 10^{-12} s, soit un millionième de microseconde !

Le temps caractéristique classique de diffusion de la chaleur, habituel au thermicien :

$$t_{\text{classique}} = \frac{L^2}{\alpha} \quad (3)$$

situe l'échelle des temps de l'établissement d'un régime stationnaire. En considérant une distance L petite mais accessible à la technologie classique d'un capteur de température du moment (de l'ordre de la dizaine de micromètres), on trouve pour le même matériau que ci-dessus un temps caractéristique classique de l'ordre de 10^{-4} s. On peut alors estimer qu'un régime transitoire précédent ce régime permanent est caractérisable par un temps de l'ordre de $t_{\text{classique}}/100$, soit 10^{-6} s.

Le domaine temporel classiquement utilisé par le thermicien est donc largement au-delà des durées maximales pour lesquelles la loi de Fourier peut être remise en question. On conçoit que cette loi ait été longtemps valable dans la totalité des cas pratiques, et le reste, aujourd'hui encore, dans la plupart des situations courantes.

Certes l'ordre de grandeur du temps caractéristique calculable par l'équation (2) peut varier considérablement suivant la nature du milieu, la nature des porteurs d'énergie (molécules, phonons, électrons...), mais la littérature admet généralement un classement des milieux homogènes en trois domaines, caractérisés par des temps de relaxation dont les valeurs approximatives sont précisées dans la *figure 1*.

Le calcul dimensionnel qui précède permet d'envisager un certain nombre de situations dans lesquelles la thermique classique risque d'être mise en défaut. Un film mince, courant, de dimension caractéristique de l'ordre du dixième de micron par exemple, de grande diffusivité (prenons $10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), présente un temps caractéristique classique de 10^{-9} s et subira des régimes transi-

toires sur des durées beaucoup plus brèves, de l'ordre de 10^{-11} s, qui risquent d'échapper aux lois classiques de la thermique, compte tenu de la valeur certainement finie du transport de la chaleur.

1.3. Le modèle hyperbolique de conduction de la chaleur

Précédant Vernotte [2], Cattaneo est le premier à bâtir, en 1948, une théorie mathématique explicite visant à corriger, dans les gaz, l'inacceptable défaut de la loi de diffusion de la chaleur. Ses arguments puisent dans la théorie cinétique et aboutissent à une équation du type :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t) - \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

Le terme d'inertie du flux ($-\tau \partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)/\partial t$) est issu de la vitesse de retour à l'équilibre d'une distribution hors d'équilibre. Il est proportionnel à la vitesse de variation de ce flux, le coefficient de proportionnalité est le temps de relaxation.

Combinée à la loi de conservation de l'énergie, en l'absence de terme source, l'équation (4) permet d'obtenir une équation de la chaleur dont la nature est hyperbolique :

$$\alpha \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

Cette équation confère à la chaleur un comportement ondulatoire rapidement amorti, pour laisser place ensuite à un comportement diffusif classique, identique à celui prévu par l'équation parabolique.

Tous les modèles développés (voir Joseph et Preziosi [3, 4] et Ozisik et Tzou [5]) pour offrir à la conduction de la chaleur une alternative au paradoxe omniprésent du transport à vitesse infinie du signal thermique ne font pas appel à l'équation hyperbolique de la chaleur, loin s'en faut. Ni l'équation d'évolution du flux (4) ni l'équation hyperbolique de la chaleur (5) ne sont unanimement admises par la communauté scientifique. Mais ces équations demeurent, aujourd'hui encore, au centre de la majorité des travaux portant sur la conduction aux petites échelles, parfois de manière indirecte. Souvent citée, parfois modifiée, contestée en raison des conflits qu'elle impose vis à vis des principes de la thermodynamique, pratiquement dépourvue de toute validation expérimentale, l'équation hyperbolique constitue néanmoins pour le moment une référence en matière de modèle substitutif à la loi classique de conduction de la chaleur.

1.4. Les inconvénients de l'équation hyperbolique

L'équation hyperbolique, par sa forme mathématique, prévoit une propagation de type ondulatoire pour la température. La présence de la dérivée seconde par rapport au temps de la température dans cette équation assure une propagation à vitesse finie et constante d'une discontinuité du champ. Sous la forme :

$$\frac{\tau}{\alpha} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6)$$

la diffusivité y apparaît comme un terme d'amortissement et le rapport τ/α apparaît comme l'inverse du carré d'une célérité :

$$C_{\text{chal}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (7)$$

La nature hyperbolique de la loi obtenue à partir de l'équation de Cattaneo–Vernotte apporte une réponse indiscutable au problème de la vitesse infinie de propagation de la chaleur. Mais elle conduit par ailleurs à un certain nombre de comportements physiquement discutables.

1.4.1. Persistance de singularités

Considérons par exemple le cas générique d'un mur semi-infini, composé d'un milieu homogène dans lequel la chaleur est transportée uniquement par conduction (*figure 2*). A l'instant initial, le mur est isotherme à température nulle et se voit imposer sur sa face libre un échelon de température d'amplitude T_1 . La chaleur se transporte ensuite dans la direction de l'axe Oy .

L'équation parabolique classique de la chaleur, munie des conditions aux limites dictées par l'énoncé du problème :

$$T(0, t) = T_1, \quad T(y \rightarrow \infty, t) = 0, \quad T(y, 0) = 0 \quad (8)$$

permet de calculer la température dans le mur à tout instant. La solution, très classique, est :

$$T(y, t) = T_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \quad (9)$$

Le champ de température peut également être calculé par l'équation hyperbolique, à condition de fournir une condition à la limite supplémentaire, en raison de la présence de la dérivée seconde par rapport au temps

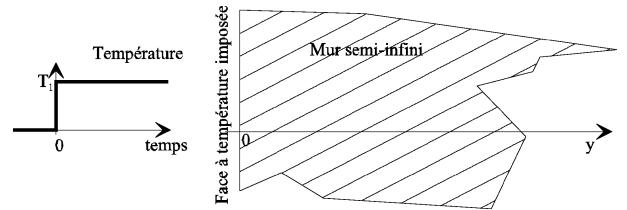


Figure 2. Cas classique du mur semi-infini soumis à un échelon de température sur sa face avant.

Figure 2. Standard case of the semi-infinite wall submitted to a front temperature step.

dans l'équation. On choisit une condition de repos initial :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y, 0) = 0 \quad (10)$$

On utilise classiquement les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$T^* = \frac{T}{T_1}, \quad y^* = \frac{y}{l_{\text{pm}}}, \quad t^* = \frac{t}{\tau} \quad (11)$$

où T_1 est l'amplitude du saut de température imposée, l_{pm} est le libre parcours moyen des porteurs d'énergie, lié à la conductivité thermique par la relation suivante (Kittel [6]) :

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho c_v V_{\text{son}} l_{\text{pm}} \quad (12)$$

En supposant, comme Chester [7], que la chaleur se propage à la vitesse moyenne du son dans une des trois directions équivalentes de l'espace dans un solide isotrope :

$$C_{\text{chal}} = c_x^2 = c_y^2 = c_z^2 \quad (13)$$

et compte tenu de la définition de la vitesse du son :

$$V_{\text{son}} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \quad (14)$$

on trouve que la célérité de la chaleur est liée à la vitesse du son, dans les milieux homogènes, isotropes et dans lesquels la conduction est assurée par les phonons, par la relation :

$$C_{\text{chal}} = \frac{V_{\text{son}}}{\sqrt{3}} \quad (15)$$

Les équations (12) et (7) combinées lient le libre parcours moyen au temps de relaxation :

$$\tau = \frac{l_{\text{pm}}^2}{3\alpha} \quad (16)$$

La solution du problème du mur selon le modèle hyperbolique, développée par Baumeister et Hamil [8] est alors :

$$\begin{aligned} T^*(y^*, t^*) &= \left(\exp\left(-\frac{t^*}{2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{t^{*2} - (y^*\sqrt{3})^2}}{2}\right) H(t^* - y^*\sqrt{3}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \exp\left(-\frac{t^*}{2}\right) \left[I_1\left(\frac{t^* - t'}{2}\right) + I_0\left(\frac{t^* - t'}{2}\right) \right] \\ &\quad \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{t'^2 - (y^*\sqrt{3})^2}}{2}\right) H(t' - y^*\sqrt{3}) dt' \quad (17) \end{aligned}$$

où I_0 et I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 et 1 respectivement et H est la fonction Heaviside. La figure 3 montre les courbes du champ ainsi calculé, en comparaison avec le champ prévu par l'équation parabolique dont l'expression, donnée dans l'équation (9), devient :

$$T^*(y^*, t^*) = \operatorname{erfc}\left(\frac{y^*}{\sqrt{4t^*/3}}\right) \quad (18)$$

en utilisant les même variables adimensionnées que ci-dessus.

On constate, sur la figure 3, que le front de discontinuité de la température se propage au cours du temps, selon le modèle hyperbolique, avec amortissement mais sans élargissement : l'amplitude du saut de température diminue avec le temps mais ce front reste « vertical ». Une diffusion de la chaleur dans le milieu, même faible, conduirait à un adoucissement de ce front, mais ce n'est

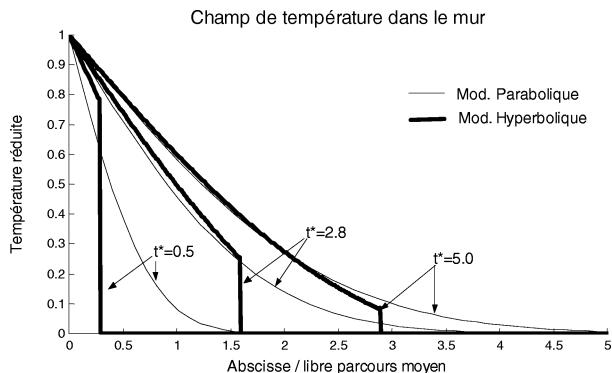


Figure 3. Champ de température dans un mur semi-infini, soumis à un saut de température imposé sur sa face. Le champ obtenu par le modèle parabolique aux même instants est rappelé en lignes fines.

Figure 3. Temperature field in a semi-infinite wall, submitted to a front temperature step at its frontier. Thin lines: temperature field obtained by the parabolic model at the same instants.

pas le cas. Le modèle hyperbolique ne conserve pas, à l'endroit du front, la notion de diffusion de la chaleur, il lui substitue un modèle propagatif à diffusion nulle. Il en résulte une difficulté d'ordre physique : la température au point de localisation du front à un instant donné n'est pas définie, ou plutôt possède deux valeurs différentes !

Il est classiquement reproché au modèle parabolique de prévoir une valeur infinie pour le flux pariétal dans le cas ci-dessus du mur semi-infini soumis à un échelon de température. Cela constitue certes un problème théorique non négligeable. Mais le modèle hyperbolique peut conduire, lui aussi, dans un mur semi-infini soumis à une impulsion de flux infiniment brève sur sa face, à une valeur infinie, celle de la température (Vick et Ozisik [9]).

1.4.2. Difficile compatibilité avec les principes de la thermodynamique

Sous l'effet du terme inertiel $\tau \partial^2 T / \partial t^2$, la température peut suivre un comportement à priori contraire au deuxième principe de la thermodynamique, lié à l'existence de flux de chaleur dirigé d'une zone froide vers une zone chaude. Nous avons détaillé dans [10] un exemple de ce type d'anomalie, obtenue dans le cas de la modulation spatiale sinusoïdale de température du réseau transitoire.

La figure 4 montre un autre exemple d'évolution signalé comme incompatible avec les principes de la thermodynamique par la littérature. La température est celle d'un mur fini, soumis à un échelon unitaire de température imposé sur sa face avant, et isolé sur sa face arrière. On constate qu'elle devient par endroit supérieure à la température imposée en façade, par un effet de

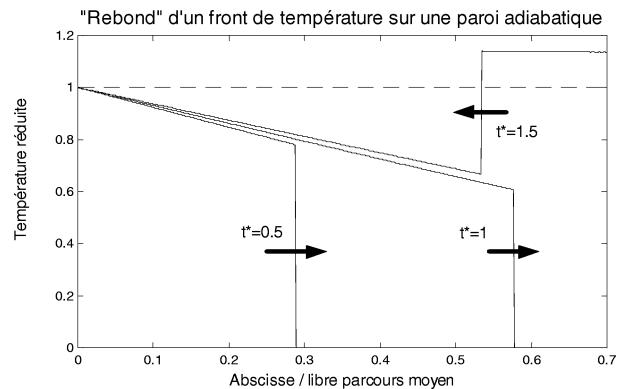


Figure 4. Champ de température dans un mur fini soumis à un échelon unitaire de température, imposé sur sa face avant et isolé sur sa face arrière.

Figure 4. Temperature field in a finite wall, submitted to a front temperature step at its frontier and thermally insulated on its back side.

réflexion du front de température propagé par l'équation hyperbolique.

Les calculs (Ozisik et Tzou [11]) montrent que, pour une dimension du milieu plus petite et toujours dans le cas d'un saut positif de température, celle-ci peut devenir partout supérieure à celle de la face avant ! Taitel [12] signale que la température, même absolue, peut éventuellement devenir négative si le saut de température est négatif, c'est à dire pour une température de face avant passant brusquement de 1 à 0.

2. DURÉES BRÈVES OU ESPACES PETITS

2.1. Confinement des effets non-Fourier

2.1.1. Second son

Le second son est la première manifestation expérimentale historique d'un transfert de chaleur inhabituel ([13–16]...). Une impulsion thermique à l'extrémité d'une colonne d'hélium à température cryogénique provoque l'excitation d'un thermomètre mobile à l'intérieur de la colonne. La position du sommet de la courbe de température enregistrée dépend linéairement de la distance entre le détecteur et la source : la propagation du signal thermique est alors qualifiée de nature ondulatoire.

Toutes les expériences de second son décrites se déroulent dans des milieux de petites dimensions par rapport au libre parcours moyen des phonons. Gutfled et Nethercot [14] par exemple mettent en évidence la propagation d'impulsions thermiques dans le quartz et le saphir à 3,8 K, avec une distance source-détecteur de 1 cm, alors que le libre parcours moyen est de 1 à 2 cm. De même, l'expérience historique de Ackerman et Bertman [15] se déroule dans un cristal d'hélium solide de 9 mm × 8 mm alors que le libre parcours moyen est estimé à 100 cm pour les processus avec retournement et 0,01 mm pour les processus normaux !

2.1.2. Phénomènes de propagation, de réflexion d'un front ou d'une impulsion thermique

Les simulations montrent que les caractéristiques surprenantes du comportement hyperbolique de la chaleur illustrées au paragraphe 1.4 (propagation d'un front de discontinuité, réflexion de ce front sur la face arrière, dépassement dans le milieu de la température imposée en façade...) n'apparaissent que pour des dimensions réduites par l_{pm} de l'ordre de quelques unités, voire moins.

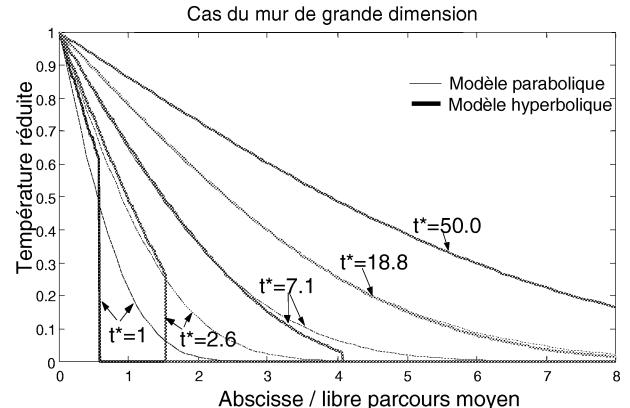


Figure 5. Champ de température prévu par le modèle hyperbolique dans un mur fini de grande dimension soumis à un échelon de température imposé en paroi.

Figure 5. Temperature field obtained by the hyperbolic model in a large finite wall submitted to front temperature step.

C'est le cas des exemples des *figures 3 et 4*. D'autres exemples de ce type abondent dans la littérature (Hector [17] et Ozisik [18], par exemple).

La *figure 5* montre ce que devient le champ de température du mur fini, avec face arrière isolée, à différents instants lorsque sa dimension réduite devient égale à 8. Hormis pour les instants $t^* < 10$ environ, le champ de température est pratiquement celui du régime parabolique. Le phénomène de réflexion du front sur la paroi arrière adiabatique n'apparaît donc évidemment plus tel qu'il apparaissait à la *figure 4*, de même, a fortiori, que les situations d'inversion du flux de chaleur (d'une zone froide vers une zone chaude) ou le dépassement de la température de paroi.

2.1.3. Peu après l'événement, tout près de l'événement

On peut citer bien d'autres études (la résonance thermique de Tzou [19], notamment, impossible sur des distances grandes devant l_{pm}) qui confirment les remarques précédentes.

La valeur du facteur τ fixe la « portée » temporelle du terme correctif $\tau \partial^2 T / \partial t^2$ dans l'équation (5). Cette portée est quantitativement faible, limitée à quelques valeurs de τ . Au-delà, le régime diffusif l'emporte, le terme $\partial T / \partial t$ devient prépondérant. Si l'on se reporte à la petitesse de l'échelle des valeurs de τ de la *figure 1*, on conçoit que la correction par le modèle hyperbolique soit une correction transitoire de très courte durée dans le temps. Le traitement hyperbolique ne modifie significativement la température (par rapport au traitement pa-

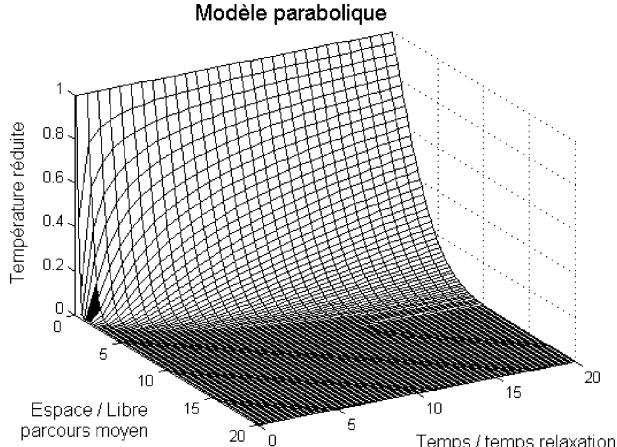


Figure 6. Pénétration du signal dans le cas du modèle parabolique (mur semi-infini soumis à un échelon de température unitaire imposé en paroi).

Figure 6. Penetration of signal in the case of the parabolic model (semi-infinite wall submitted to a front temperature step).

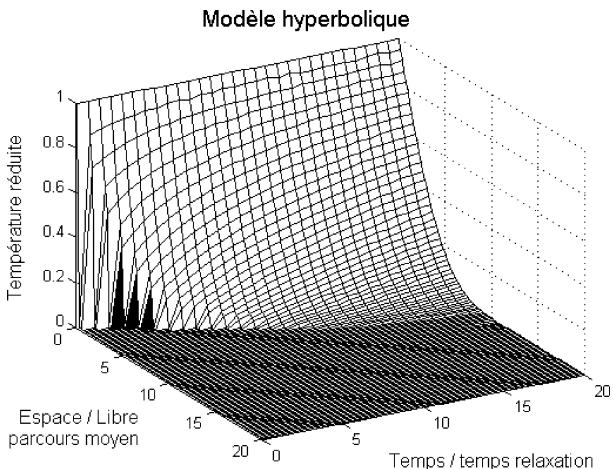


Figure 7. Même configuration que la figure 6, mais avec le modèle hyperbolique.

Figure 7. The same configuration as figure 6, but using the hyperbolic model.

rabolique) que pour des temps réduits t/τ inférieurs à quelques unités.

Pendant ces courtes durées qui suivent l'apparition de l'événement thermique, le champ de température n'évolue que dans un très petit domaine. Les figures 6 et 7, qui montrent le champ de température parabolique puis hyperbolique à tout instant et en tout lieu du mur semi-infini soumis à un échelon de température sur sa face, illustrent ce point : il est clair que le domaine spatial affecté par une modification significative de la tempéra-

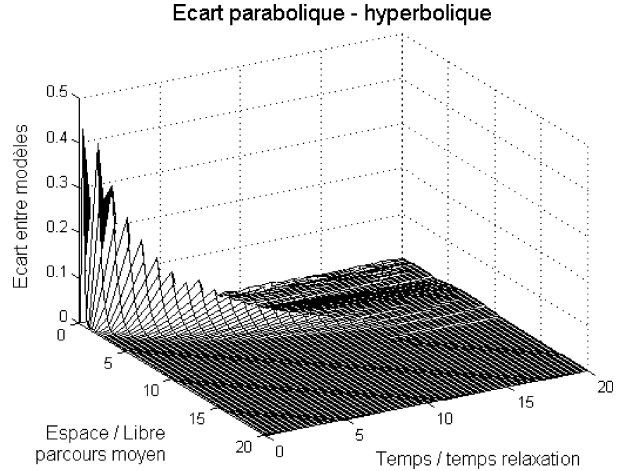


Figure 8. Ecart entre champ de température parabolique et hyperbolique en fonction de l'espace et du temps (cas du mur semi-infini soumis à un échelon de température imposé).

Figure 8. Difference between parabolic and hyperbolic temperature field versus space and time (case of the semi-infinite wall submitted to a front temperature step).

ture est limité à quelques l_{pm} si l'on se limite à une durée de l'ordre de quelques τ après l'instant initial, quel que soit le modèle de conduction utilisé. Dans la mesure où les modèles hyperbolique et parabolique ne conduisent à des températures différentes que sur une durée maximum de l'ordre de 10τ , il ne paraît possible de rechercher des effets «non-Fourier» que dans un domaine spatial de l'ordre de $10l_{pm}$ autour de l'événement thermique. La figure 8 montre, par différence entre les températures calculées par les modèles parabolique et hyperbolique (différence entre les figures 6 et 7), l'étendue supposée des effets «non-Fourier» dans ce cas de configuration.

Il semble difficile d'imaginer contourner l'obstacle de la petitesse des dimensions par un meilleur choix d'une configuration expérimentale ou par l'étude d'un cas d'école plus judicieux. De par le caractère indiscutablement fini de la vitesse de transport de l'énergie thermique, le domaine spatial affecté par les conséquences d'un événement thermique localisé dans le temps et dans l'espace est réduit, pendant une durée brève suivant cet événement, à une étendue petite autour de celui-ci. Lorsque cette durée est de l'ordre de quelques τ , le domaine concerné est de l'ordre de quelques l_{pm} (tableau I).

Ce lien intime qui existe entre l'aspect temporel du régime transitoire et son aspect spatial peut s'exprimer formellement en comparant le temps caractéristique de diffusion $t_{classique}$, défini par l'équation (3), réduit par τ , à une dimension du milieu L , réduite par l_{pm} . On obtient,

TABLEAU I / TABLE I

Temps de propagation caractéristiques et libre parcours moyen des porteurs d'énergie de quelques matériaux à température ambiante.

Characteristic propagation time and mean free path of energy carriers of some materials (room temperature).

Matériau	Diffusivité thermique α	Temps de propagation α/V_{son}^2	Libre parcours moyen $l_{\text{pm}} = 3\alpha/V_{\text{son}}$
Gaz standard	$\approx 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\approx 0,8 \times 10^{-10} \text{ s}$	$\approx 0,9 \times 10^{-7} \text{ m}$
Hélium	$\approx 6 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\approx 0,6 \times 10^{-10} \text{ s}$	$\approx 1,8 \times 10^{-7} \text{ m}$
Diélectrique solide	$\approx 5 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\approx 2 \times 10^{-13} \text{ s}$	$\approx 1,0 \times 10^{-9} \text{ m}$
Diélectrique liquide	$\approx 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\approx 4 \times 10^{-14} \text{ s}$	$\approx 2,0 \times 10^{-10} \text{ m}$
Diamant type IIa	$\approx 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\approx 3 \times 10^{-12} \text{ s}$	$\approx 1,7 \times 10^{-7} \text{ m}$

d'après l'équation (16) :

$$\frac{t_{\text{classique}}}{\tau} = 3 \frac{L^2}{l_{\text{pm}}^2} \quad (19)$$

Cette équation ne doit bien entendu être considérée que comme fournissant un ordre de grandeur du rapport entre ces grandeurs. Toutefois, le caractère désordonné de l'agitation thermique particulière, incline à penser qu'une relation entre τ et l_{pm} doit exister, de même, par conséquent, qu'une relation entre les échelles de temps et d'espace du régime transitoire.

Dans le cas d'une succession d'évènements ou d'un évènement non localisé dans le temps comme la modulation périodique d'une source par exemple (Yuen et Lee [20]), la situation est légèrement différente mais les calculs montrent (Guillemet [21]) que loin de la paroi (c'est à dire au-delà de quelques l_{pm}), les modèles parabolique et hyperbolique conduisent aux mêmes prévisions, l'écart reste indéfiniment nul, même lorsque le régime périodique est établi, longtemps après le régime transitoire.

Le confinement des effets non-Fourier n'est donc pas lié à l'existence d'un événement thermique unique ou instantané.

2.2. Du temps à l'espace, cartographie de l'avancement du signal thermique

On peut quantifier l'étendue des régions décrites par les figures 6 et 7, à partir de la notion habituelle de distance de pénétration. Imposons une limite inférieure, en dessous de laquelle on considérera que la température, initialement nulle partout, n'a pas encore été modifiée par l'arrivée du signal thermique qui a été communiqué à la

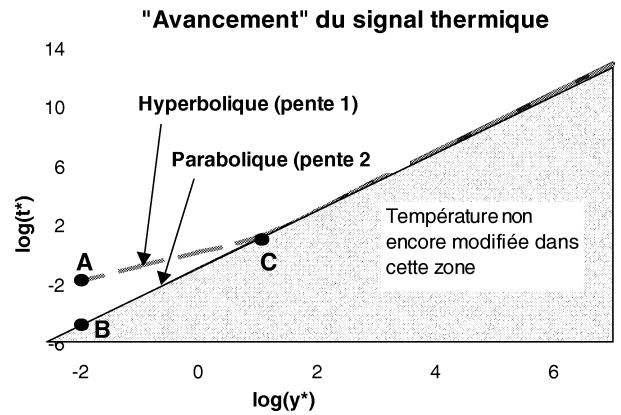


Figure 9. Position du « front » de modification de température, avec un seuil de 1 % de T_1 .

Figure 9. Position of the temperature jump, with a threshold of 1 % of T_1 .

face d'entrée du mur. Fixons par exemple :

$$T^* = 10^{-2} \quad (20)$$

ce qui assure un seuil de 1 % de la température finale, obtenue pour un temps infini. En régime de conduction parabolique, on doit avoir, d'après l'équation (18) :

$$t^* \approx 0,226y^{*2} \quad (21)$$

Le seuil choisi définit donc une droite de pente 2 dans une échelle Log–Log (figure 9), comme attendu pour un phénomène diffusif.

La résolution de l'équation :

$$T^*(x^*, t^*) - 10^{-2} = 0 \quad (22)$$

où T^* est la température calculée par le modèle hyperbolique, donnée par l'équation (17), permet de tracer la courbe relative à la distance de pénétration du modèle hyperbolique. Elle se décompose sommairement en deux portions de droites : une droite de pente 1 pour les temps

courts (en dessous d'une dizaine de τ), caractéristique des phénomènes de propagation, et une droite de pente 2, superposée à celle du modèle parabolique pour les temps longs.

Veut-on regarder tôt dans le temps ? La figure 9 nous indique que, pour une date de l'ordre de 10τ , on ne peut rien observer si l'on mesure la température en un lieu distant de la paroi de plus $7l_{pm}$ environ. Il faut, pour que le champ de température soit significativement modifié à cet instant-là, se placer à une distance plus petite que ces $7l_{pm}$.

Comme il se doit avec ce type de technique, la position (mais pas la nature) des courbes obtenues est liée à la valeur numérique arbitraire choisie pour le seuil. Mais les calculs montrent que cette dépendance est relativement faible [21].

Quel que soit le dispositif envisagé, la cartographie type de la figure 9 permet de situer, dans le cas d'un événement thermique unique et localisé, le domaine à l'intérieur duquel un écart peut être recherché entre le modèle parabolique et le modèle hyperbolique : la partie ABC de cette figure. C'est un domaine des temps ultracourts ($t < 10\tau$ environ) et des espaces petits ($y < 10l_{pm}$ environ).

Pour un instant fixé, le seuil de modification de la température est atteint, pour le modèle parabolique, plus loin de la paroi que pour le modèle hyperbolique. A l'inverse, nous pensons que la pente de la droite AB ne constitue pas une limite inférieure. Il est concevable qu'à ces échelles de temps et d'espace, le transport de la chaleur dans les milieux homogènes soit encore plus lent que celui prévu par l'équation hyperbolique. Le paragraphe 3, introduisant une résistance thermique et une modification de la capacité thermique locale, envisage cette possibilité.

2.3. Déplacement du problème de conduction «non-Fourier»

2.3.1. Nécessité d'un modèle de conduction aux petites échelles d'espace

On sait que la notion de conductivité thermique nécessite, pour être fondée, des domaines spatiaux sur lesquels suffisamment d'interactions entre porteurs d'énergie sont intervenues. L'étendue de ces domaines est habituellement de l'ordre de grandeur de quelques dizaines de l_{pm} .

Mais l'étude du paragraphe précédent montre qu'une tentative de mise en défaut de la loi de Fourier nécessite

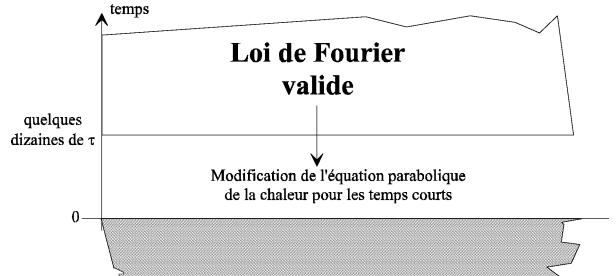


Figure 10. Le problème de base initial de la conduction «non-Fourier».

Figure 10. The basic initial problem of “non-Fourier” conduction.

justement de se placer dans ces petits domaines d'espace. Se pose alors le problème de la validité de la notion de la conductivité, aussi utile à l'application du modèle hyperbolique qu'à celle du modèle parabolique. Quel sens possèdent par exemple les courbes de la figure 3, pour des distances aussi petites ? La question est encore plus délicate pour la figure 4 ! L'utilisation d'une conductivité au sens classique du terme, indépendante du temps et de la position dans le milieu (homogène) sur des distances inférieures à quelques l_{pm} ne semble pas de nature à renseigner en quoi que soit a priori sur la pertinence de tel ou tel modèle de conduction aux temps courts, dans la mesure où on applique alors un concept macroscopique à l'intérieur d'un domaine microscopique qui le met certainement en défaut par la petitesse de son échelle spatiale.

Ce point est parfois évoqué dans la littérature. Bien que la majorité des travaux sur la réfutation de la loi de Fourier envisagent le seul paramètre temps et que les modèles de conduction proposés soient à caractère fortement instationnaire, quelques rares études portent sur le paramètre d'espace. Chen [22] rappelle par exemple que la loi de Fourier sous-estime toujours l'élévation de température au proche voisinage de sources de chaleur nanoscopiques, y compris en régime permanent, et montre que la notion de conductivité ne peut être utilisée sur des très petits domaines qu'à condition de considérer une «conductivité effective» qui ne serait plus indépendante de la position dans le milieu homogène, mais qui décroît à mesure que l'on s'approche de la particule dont on calcule la température.

La question initiale de la conduction «non-Fourier» se modifie donc : de la recherche d'un modèle de conduction pour les durées brèves (figure 10), on se déplace vers la recherche d'un modèle de conduction en régime permanent dans les petits espaces, extensible aux régimes transitoires ultra rapides (figure 11).

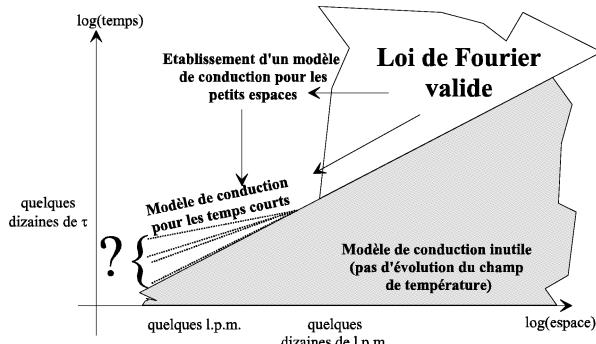


Figure 11. Introduction de la nécessité d'un modèle de conduction aux petites distances.

Figure 11. Necessity of a small distance conduction model.

A condition de ne l'appliquer que sur des distances supérieures à quelques dizaines de l_{pm} , la loi de Fourier doit rester valable à tout instant, puisque le temps d'observation à ces distances est supérieur à quelques dizaines de τ . Le problème de la conduction aux temps ultracourts apparaît dans le cas inverse, où l'on applique la loi de Fourier sur des espaces trop petits pour que la notion de conductivité thermique qu'elle implique ait un sens. Ce n'est alors plus un problème de conduction aux temps ultracourts qui se pose, mais un problème de modèle de conduction pour les petites distances *et* les temps ultracourts.

A cette échelle d'espace, la notion même de température commence à poser des problèmes, ne serait-ce que parce lorsque les interactions entre porteurs d'énergie sont peu fréquentes, il est facilement envisageable d'imaginer une situation dans laquelle deux populations de porteurs d'énergie à des températures différentes coexistent, sans thermalisation rapide. La température locale est alors délicate à définir.

2.3.2. Importance technologique de la conduction aux petites distances

De même que vis à vis du problème temporel, la loi de conduction de la chaleur n'est pas le seul modèle de transfert limité par la microscopie de ses applications : la convection doit faire face à des micro-sources de chaleur mal modélisées, les transferts diphasiques dans les microcaloducs n'obéissent pas aux lois macroscopiques classiques... Comme le libre parcours moyen des molécules dans le domaine de la convection ou la distance d'influence des forces de van der Waals dans celui des transferts diphasiques, le libre parcours moyen des porteurs d'énergie caractérise, vis à vis des phénomènes de

transport conductif, l'échelle d'espace pour laquelle le modèle macroscopique de transfert doit être reconstruit.

Cette échelle est certes petite, mais technologiquement accessible, notamment à mesure que l'on descend dans l'échelle des températures et que le libre parcours moyen augmente (Duncan et Peterson [23]). Pour un composé amorphe tel que le verre, le rapport entre l'échelle moléculaire (de l'ordre de 10^{-10} m) et l'échelle du libre parcours moyen est de l'ordre de l'unité, ce qui permet d'imaginer assez peu de situations mettant en évidence le problème microscopique de la conduction thermique. Mais pour un composé de grande diffusivité thermique, ce rapport décroît rapidement. Pour le diamant, il est de l'ordre de 10^{-10} m/ 10^{-7} m = 0,001 : on conçoit alors que l'utilisation d'un film de diamant échappe rapidement au modèle classique de conduction, même pour des épaisseurs relativement grandes, de l'ordre du micromètre. Les systèmes fonctionnant sur des dimensions de l'ordre du libre parcours moyen ne sont plus rares : le bolomètre supraconducteur à 20 K de 40 nm d'épaisseur, des FET (transistors à effet de champ) sur isolant, les MESFET en AsGa avec des portes de 0,2 μm [24]... Bien d'autres situations sont recensées et discutées dans la littérature [25] et touchent de nombreux programmes prioritaires de la recherche [1].

2.3.3. Nécessité de la prise en compte des conditions aux frontières

Lorsqu'un échelon de température d'amplitude égale à 1 vient s'appliquer à la paroi du mur semi-infini qui nous sert de cas d'école, celui-ci se voit imposé un signal qui peut être décrit par une somme infinie de signaux sinusoïdaux de pulsation ω et d'amplitude $A(\omega)$:

$$T(y=0, t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (23)$$

Lorsque l'on applique le modèle parabolique de conduction de la chaleur, muni des conditions aux limites classiques suivantes :

$$T(0, t) = 1, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}(y \rightarrow \infty) = 0, \quad T(y, 0) = 0 \quad (24)$$

on trouve que la contribution de chaque composante de ce signal au point situé à la distance y est donnée par la relation (25) :

$$T(y, t) = \int_0^{+\infty} A(\omega) \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \cdot \sin\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) d\omega \quad (25)$$

Il apparaît clairement que la composante de fréquence infinie, si elle est bien présente dans le signal source, à la paroi, se trouve infiniment amortie par le facteur $\exp(-y\sqrt{\omega/2\alpha})$ dès que l'on se place à une distance non nulle de celle-ci. Autrement dit, l'échelon de température s'y trouve déformé et ne comporte plus de «front» infinitement raide. Il importe alors peu que la vitesse de phase de la composante de fréquence infinie soit encore infinie puisque celle-ci ne correspond qu'à un signal thermique infinitement faible, dès que l'on quitte la paroi. Le paradoxe de la vitesse infinie de la chaleur n'apparaît donc qu'au point singulier $y = 0$ et $t = 0$, la vitesse n'est plus infinie au-delà.

Cette constatation déplace à nouveau le problème de la conduction «non-Fourier». Elle met en évidence un problème davantage lié à la définition des conditions aux limites dans l'équation (24), qu'à la nature même de la loi de Fourier : ces conditions aux limites sont indéfinies au point $y = 0$ et $t = 0$. Ceci est la conséquence du traitement macroscopique du problème, avec un échelon de température «idéalisé», physiquement irréaliste (existe-t-il une source de capacité infinie que l'on puisse mettre en contact parfait avec le milieu, pour lui imposer instantanément un tel saut de température de paroi?). Il n'est pas étonnant que cette idéalisation mathématique pose un problème lorsque l'échelle de description physique du phénomène atteint celle du comportement microscopique de la matière. Il n'est pas concevable qu'un tel modèle de conditions aux limites rendent compte de la réalité du transfert à proximité de la paroi alors que *les interactions entre porteurs y deviennent minoritaires par rapport aux interactions avec la paroi*.

Loin de la paroi, longtemps après l'application du saut de température, ce problème s'évanouit, le champ de température est calculable macroscopiquement par la loi parabolique aussi bien que par la loi hyperbolique, qui fournissent les mêmes résultats, même pour des points très rapprochés les uns des autres (par rapport à l_{pm}), même à des instants de dates très voisines (par rapport à τ).

Le problème de la conduction «non-Fourier» apparaît ainsi intimement lié au problème de la définition des conditions à la limite. Dans le cas d'un événement thermal localisé dans le temps et dans l'espace, la description microscopique des transferts à proximité de l'origine du plan espace-temps localisant cet événement est prépondérante. Dans la figure 12, la zone limitée à quelques dizaines de l_{pm} et quelques dizaines de τ peut être considérée comme une étape intermédiaire, précédant l'établissement du régime de conduction diffusive. Au-delà, l'influence des aspects microscopiques liés aux condi-

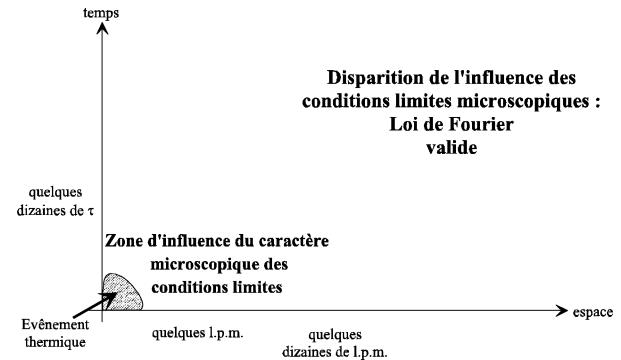


Figure 12. La conduction «non-Fourier» en termes d'«oubli» des conditions limites.

Figure 12. The “non-Fourier” conduction and the forgetfulness of the limit conditions.

tions aux limites s'amenuise, et une description macroscopique de celles-ci suffit alors.

Dans le cas d'un événement thermal localisé au sein du milieu et non plus à sa frontière (cas d'une source interne), les phénomènes non-Fourier existent également, avec les mêmes échelles de temps et d'espace.

3. PRISE EN COMPTE ET INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES ADAPTÉES À L'ÉCHELLE MICROSCOPIQUE

3.1. Cadre cinétique du modèle

Reconnaissant l'obligation de considérer simultanément la petitesse des échelles de temps *et* d'espace, nous avons présenté (Bardon et Guillemet [26]) un modèle cinétique permettant de prolonger l'application du modèle continu de conduction de la chaleur jusqu'à des domaines spatio-temporels limités à quelques l_{pm} et à quelques τ , mais en utilisant des conditions aux limites appropriées. Pour cela, nous conservons la forme macroscopique du modèle de conduction, mais en modifiant les conditions aux limites en faisant intervenir un saut des grandeurs macroscopiques à la frontière (température et flux de chaleur), pour tenir compte de l'aspect microscopique des interactions avec la frontière au voisinage de celle-ci, là où la notion classique de conductivité thermique qui ne tient pas compte des processus d'interaction porteurs-paroi ne peut pas s'appliquer.

On montre alors que, dans le cas d'une température de paroi (T_p) dite imposée, il convient de remplacer la

condition limite classique :

$$T(0, t) = T_p(t) \quad (26)$$

par la condition limite modifiée [21] :

$$q(0, t) = \frac{T_p(t) - T(0, t)}{R} + \rho c_v l_{pm} \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_p(t) - T(0, t)}{2} \right) \quad (27)$$

où R est une résistance thermique, de valeur a priori inconnue, introduite pour rendre compte globalement des interactions entre porteurs et frontière (voir [21]) et μ un coefficient de pondération, compris entre 0 et 1, corrigeant la capacité thermique de la couche proche de la frontière d'épaisseur l_{pm} .

Ce modèle peut conduire à une modification significative du champ de température calculable par le modèle continu dans le milieu pendant le régime transitoire. La distance de pénétration de ce modèle s'en trouve alors significativement différente, comme le montre l'exemple qui suit.

3.2. Application au cas du mur semi-infini

On considère à nouveau, comme au paragraphe 1.4.1, un milieu semi-infini initialement au repos thermique à la température nulle et instantanément et définitivement mis en contact sur sa face avant avec un thermostat parfait de température T_1 . On calcule le champ de température en $y^* = 1$ par le modèle parabolique puis hyperbolique en utilisant d'abord une condition à la limite classique sur la face avant, donnée par l'équation (26). Puis, pour juger de l'effet relatif de la prise en compte de l'aspect microscopique des interactions aux frontières, on applique ensuite au modèle de conduction hyperbolique une condition à la limite modifiée selon notre modèle, donnée par l'équation (27).

La figure 13 présente l'évolution des températures en $y^* = 1$ obtenues par ces trois simulations.

Il a été souvent souligné que la loi parabolique sous-estime probablement la montée en température, dans de nombreuses configurations, par rapport à la loi hyperbolique. On constate classiquement ce phénomène dans la figure 13, aux instants voisins de $t^* = 2$. Fait remarquable ici, on constate sur cette même figure que la prise en compte du défaut de conduction dans la zone proche de la frontière tend à limiter la montée en température dans le milieu en raison de la limitation

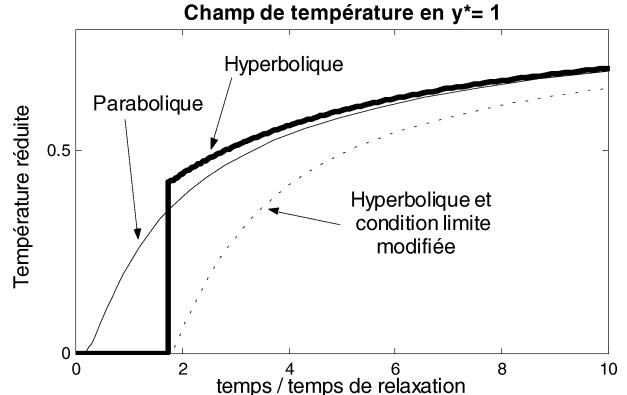


Figure 13. Températures comparées en $y^* = 1$, modèles parabolique et hyperbolique, condition limite classique puis modifiée ($R = 0,1l_{pm}/\lambda$ et $\mu = 0,8$).

Figure 13. Comparison of temperatures at $y^* = 1$, parabolic and hyperbolic model, classical limit conditions then modified limit conditions ($R = 0,1l_{pm}/\lambda$ and $\mu = 0,8$).

du flux transmis qu'impose la résistance d'interface : la température en chaque point prévu par application de l'équation (27) est, dans notre exemple, inférieure à tout instant à celle obtenue par application de l'équation (26). Le dépassement de température signalé précédemment, prévu par le modèle hyperbolique muni de sa condition limite classique, est donc annulé par la modification de la condition à la limite.

Il est à noter que la vitesse finie de propagation du signal imposée par l'équation hyperbolique est conservée par notre modèle de condition à la limite, puisque l'on constate que la température en $y^* = 1$ par exemple reste nulle jusqu'à $t^* = 1,7$ même avec notre condition limite modifiée. Par contre, la propagation du front de discontinuité disparaît avec la modification de la condition à la limite, ce qui constitue un apport certain de notre modèle.

Le calcul de la distance de pénétration du signal thermique s'effectue, comme précédemment, en résolvant l'équation (22), avec un champ de température calculé en utilisant le modèle hyperbolique muni de la condition à la limite modifiée selon l'équation (27). La figure 14 montre que l'on obtient, en coordonnées logarithmiques, une droite de pente sensiblement égale à celle obtenue par le modèle hyperbolique muni de sa condition limite classique. Mais le décalage de la courbe vers le haut de la figure doit être interprété comme une distance de pénétration du signal thermique (pour une date donnée) plus faible lorsque l'on utilise la condition à la limite modifiée. Ce décalage est d'ailleurs maximum pour une distance à la paroi de l'ordre de $10l_{pm}$ (y^* voisin de 10). Il est lié à la limitation du transfert de chaleur par le manque d'in-

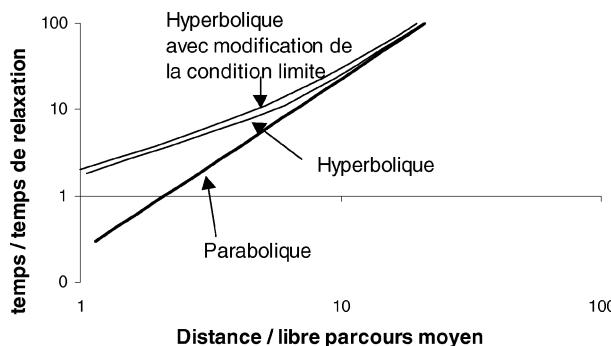


Figure 14. Distance de pénétration du signal thermique, avec un seuil de 1% de T_1 , modèles parabolique et hyperbolique, condition limite classique puis modifiée ($R = 0,1l_{pm}/\lambda$ et $\mu = 0,8$).

Figure 14. Penetration depth of the thermal signal, with a threshold of 1% of T_1 , parabolic and hyperbolic model, classical limit conditions then modified limit conditions ($R = 0,1l_{pm}/\lambda$ and $\mu = 0,8$).

teraction entre porteurs au voisinage de la paroi, modélisé par l'équation (27).

4. CONCLUSION

L'introduction d'un temps de relaxation dans la loi phénoménologique de Fourier transforme l'équation parabolique classique de conduction de la chaleur en une équation hyperbolique. L'objectif recherché, de disposer d'une équation de la chaleur ne permettant pas de rendre instantanément perceptible une perturbation locale du champ de température, même en un lieu infiniment éloigné de cette perturbation, est atteint : la propagation à vitesse finie d'une discontinuité du champ est assurée. Mais des comportements physiquement discutables sont alors prévisibles, pendant des régimes transitoires de durée de l'ordre de quelques τ : persistance de singularités, phénomènes de dépassement de température ou d'oscillation du champ de température. Ces constatations alimentent un débat thermodynamique qui est loin d'être clos.

Par ailleurs, l'étude quantitative de l'étendue des domaines d'espace concernés par la brièveté des régimes transitoires montre que tous les phénomènes discutables évoqués ci-dessus sont confinés, au voisinage de l'événement thermique source du régime transitoire, dans des régions dont l'étendue n'est que de l'ordre de quelques l_{pm} .

La petitesse des dimensions de ces domaines sur lesquels on est ainsi contraint d'appliquer l'équation hyperbolique rend contestable l'exactitude des résultats obtenus : l'application de la notion classique de conductivité thermique dans un domaine à l'intérieur duquel très peu

d'interactions entre porteurs d'énergie ont lieu (vis-à-vis du nombre d'interaction entre porteurs et frontière) n'est pas licite.

Disposer d'un modèle de conduction aux temps ultra courts nécessite donc de reconsidérer la modélisation du transport de la chaleur sur une très courte distance au voisinage d'une frontière afin de ne pas étendre l'utilisation d'une grandeur macroscopique dans ce domaine où le besoin d'un traitement microscopique des interactions commence à se faire ressentir.

Il est toutefois possible de conserver une modélisation macroscopique du transport de la chaleur dans ces conditions, par la prise en compte du caractère microscopique des interactions entre porteurs d'énergie au voisinage de la frontière et en se limitant à un domaine éloigné de la frontière d'au moins une fois le libre parcours moyen. Cette prise en compte s'effectue en globalisant l'ensemble du défaut de conduction à la frontière dans une modification de la condition à la limite, incluant un terme résistif d'interface et un terme de correction de la capacité thermique de cette interface.

La condition à la limite ainsi obtenue, du type 4^{ème} espèce, modifie significativement le champ de température calculable par l'équation hyperbolique. Le transport de la chaleur à vitesse finie est conservé et les contradictions physiques mentionnées auxquelles conduit l'équation hyperbolique munie de conditions limites classiques disparaissent.

RÉFÉRENCES

- [1] Saulnier J.B., Taine J., Enjeux en physique des transferts, Rapport de la Mission Scientifique et Technique, DSPT 8, Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche, et de la Technologie, Paris, France, avril 1997.
- [2] Vernotte P., Quelques complications possibles dans les phénomènes de conduction thermique, Comptes Rendus Hebdomadaires de Séance de l'Académie des Sciences, Paris 252 (1961) 2190-2191.
- [3] Joseph D.D., Preziosi L., Heat waves, Rev. Mod. Phys. 61 (1) (1989) 41-73.
- [4] Joseph D.D., Preziosi L., Addendum to the paper on heat waves, Rev. Mod. Phys. 62 (1990) 375-391.
- [5] Özisik M.N., Tzou D.Y., On the wave theory in heat conduction, J. Heat Tran. 116 (1994) 526-535.
- [6] Kittel C., Introduction à la physique de l'état solide, Bordas, Paris, France, 1986.
- [7] Chester M., Second sound in solids, Phys. Rev. 131 (5) (1963) 2013-2015.
- [8] Baumeister K.J., Hamil T.D., Hyperbolic heat conduction equation — a solution for semi-infinite body problem, J. Heat Tran. 93 (1971) 126-128.

- [9] Vick B., Ozisik M.N., Growth and decay of a thermal pulse predicted by the hyperbolic heat conduction equation, *J. Heat Tran.* 105 (1983) 902-907.
- [10] Guillemet P., Bardon J.P., Rauch C., Experimental route to non-Fourier heat conduction, *Int. J. Heat Mass Tran.* 40 (17) (1997) 4043-4053.
- [11] Özisik M.N., Tzou D.Y., On the wave theory in heat conduction, *J. Heat Tran.* 116 (1994) 526-535.
- [12] Taitel Y., On the parabolic, hyperbolic and discrete formulation of the heat conduction equation, *Int. J. Heat Mass Tran.* 15 (1972) 369-371.
- [13] Peshkov V., Second sound in helium II, *J. Phys. USSR* VIII (1944) 381.
- [14] Gutfeld R.J., Nethercot A.H., Heat pulses in quartz and sapphire at low temperatures, *Phys. Rev. Lett.* 12 (23) (1964) 641-644.
- [15] Ackerman C.C., Bertman B., Fairbank H.A., Guyer R.A., Second sound in solid helium, *Phys. Rev. Lett.* 16 (1968) 789-790.
- [16] Narayananamurti V., Dynes R.C., Observation of second sound in bismuth, *Phys. Rev. Lett.* 28 (1972) 1461.
- [17] Hector L.G., Kim W.S., Ösizik M.N., Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium due to axisymmetric surface sources, *Int. J. Heat Mass Tran.* 35 (4) (1992) 897-912.
- [18] Ösizik M.N., Vick B., Propagation and reflexion of thermal waves in a finite medium, *Int. J. Heat Mass Tran.* 27 (1987) 1845-1854.
- [19] Tzou D.Y., Thermal resonance under frequency excitations, *J. Heat Tran.* 114 (1992) 310-316.
- [20] Yuen W.W., Lee S.C., Non-Fourier conduction in a semi-infinite solid subject to oscillatory surface thermal disturbances, *J. Heat Tran.* 111 (1989) 178-181.
- [21] Guillemet Ph., Contribution expérimentale et théorique à l'étude des phénomènes thermiques instationnaires ultra-rapides, de la nanoseconde à la picoseconde, Thèse de Doctorat, École polytechnique de l'université de Nantes, Nantes, France, 2000.
- [22] Chen G., Nonlocal and non-equilibrium heat conduction in the vicinity of nanoparticules, *J. Heat Tran.* 118 (1996) 539-545.
- [23] Duncan A.B., Peterson G.P., Review of microscale heat transfer, *Appl. Mech. Rev.* 47 (9) (1994) 397-428.
- [24] Fushinobu K., Majumdar A., Hijikata K., Heat generation and transport in submicron semiconductor devices, *J. Heat Tran.* 117 (1995) 25-31.
- [25] Bayazitoglu Y., Peterson G.P., Fundamental issues in small scale heat transfer, in: Winter Annual Meeting of the ASME, HTD Vol. 227, Anaheim, California, November 8-13, 1992.
- [26] Bardon J.P., Guillemet Ph., New boundary conditions and heat transfer at microscale, in: Proc. 11th International Conference on Heat Transfer, Chongju, Corea, August 1998, Vol. 5, 1998, pp. 15-20, 93-98.

Abridged English version

Heat conduction at very short times: spatio-temporal limits of parabolic and hyperbolic models

1. AN UNUSUAL VISION OF HEAT TRANSFER

1.1. The limit of the Fourier law

The well-known paradox of the Fourier law concerns the very first moments of the transient regimes, characterized by the time scale of equation (2) and *figure 1*, whereas classical heat conduction is characterized by the time scale of equation (3). These two scales are quite different except in extreme situations where modern technology can lead to.

1.2. The hyperbolic model and its drawbacks

The hyperbolic model of heat conduction (equation (5)), based on a delay between heat flux and tem-

perature gradient (equation (4)), leads to a satisfactory finite speed of heat propagation (equation (7)) but shows a number of drawbacks as illustrated in *figure 3*: the temperature jump in a semi-infinite wall induced by a step change of front temperature propagates without any widening, leading to a surprising persistent temperature discontinuity. Other examples of drawbacks are described in literature: infinite value of temperature [9], peculiar thermodynamic behavior [11, 12] etc.

2. SHORT TIMES OR SMALL SPACES

2.1. The confining of non-Fourier effects

Second sound phenomenon [13-16] and other wave behavior [17-19] of heat always occur in very small space, of the order of few mean free paths of the

energy carrier of the medium. In larger space, no such behavior can be expected (*figure 5*). As it is illustrated in *figures 6–8*, the non-Fourier effects can only be observed not only under very short times (few relaxation times) but also into very small space (few mean free paths).

2.2. From time to space: penetration depth

Applying a threshold to the temperature change in the medium (equation (22)), a penetration depth of the frontier thermal perturbation can be calculated at any time. In the case of semi-infinite wall submitted to a front step of temperature, as in most other cases, parabolic and hyperbolic models lead to a significant difference (*figure 9*) only in a space–time domain limited by about 10 relaxation times and 10 mean free paths.

2.3. Shifting of the non-Fourier conduction problem

Thermal conductivity is a macroscopic notion that requires, to be valid, a sufficiently high number of interactions between energy carriers. Therefore, the space domain must be large enough, compared to the mean free path: few tens of mean free paths is a currently admitted limit. But the above remarks show that non-Fourier effects do not concern those large space domains. What is the meaning of *figures 3* and *4*, where a macroscopic notion (thermal conductivity) is used at a microscopic scale?

The non-Fourier conduction problem must be shifted: it is not only an ultrashort time conduction model that must be considered (*figure 10*), but also (first) a small space conduction model (*figure 11*).

3. NEW BOUNDARY CONDITIONS, ADAPTED TO THE MICROSCOPIC SCALE

3.1. Kinetic frame

At the space scale described above, the interactions between energy carriers and frontier are more numerous than interactions between other energy carriers. The bringing-in of boundary condition is then of the highest importance.

A kinetic model has been proposed [26] in order to extend the validity of the continuous heat conduction model up to a space scale of about one mean free path. It uses the classical (parabolic) heat conduction model, but modified boundary condition. For example, in the case of an imposed wall temperature (equation (26)), the modified boundary condition makes use of a thermal resistance (equation (27)) and of a modification of the surface layer thermal capacitance that correct a lack of energy conservation on the boundary.

3.2. Example of application

The influence of the modification of the boundary condition on the temperature field and on the penetration depth can be significant. In the case of the semi-infinite wall submitted to a front step of temperature, *figure 13* shows the evolution of the temperature at a distance equal to one mean free path. It can be observed that:

- temperature rise is limited by the resistive term of the modified boundary condition (temperature overshooting phenomenon is then impossible),
- finite speed of propagation is (of course) retained when using new boundary conditions, but the temperature jump disappears,
- penetration depth (*figure 14*) is reduced by the lack of interaction among energy carriers near the frontier. The maximum of this decreasing occurs at a distance of about 10 mean free paths.

4. CONCLUSION

A quantitative study of the space scale of the transient regimes proves that beside its numerous drawbacks, the hyperbolic heat conduction equation uses a macroscopic notion (thermal conductivity) in microscopic domains (few mean free paths of energy carriers) where too few interactions among energy carriers are taking place. The validity of the temperature that can be calculated in this way is, thus, questionable.

It is possible to extend the validity of the continuous heat conduction model up to a space scale of about one mean free path, using modified boundary conditions involving jumps of macroscopic quantities at the frontier where thermal event occurs.

The new boundary conditions significantly modify the temperature field that can be calculated using the hyperbolic model. Its main drawbacks are removed.